

# Прикладна механіка та математичні методи

УДК 629.78

DOI: 10.15421/452017

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНИВАНИЯ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА**

И.А. Сидоров, А.А. Манойленко

*Днепровский национальный университет имени Олеса Гончара, пр. Гагарина 72, г. Днепр,  
49010, Украина, e-mail: [aamz5@meta.ua](mailto:aamz5@meta.ua)*

**Аннотация.** В настоящее время отмечается повышенный интерес к созданию бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС), которые составляют информационное ядро современных бортовых комплексов ориентации и навигации космических аппаратов (КА). БИНС могут включать магнитометры, астродатчики, датчики угловых скоростей (ДУС). Точность определения ориентации КА во многом зависит от состава БИНС. Наличие ДУС в составе БИНС обеспечивает лучшую точность. В связи с этим задачи, связанные с фильтрацией "зашумленных" данных с ДУС, оценением и расчетом погрешностей оценок, калибровкой датчиков БИНС, являются актуальными. В данной работе предложена математическая модель для решения задачи расчета погрешностей оценивания угловых скоростей КА с учетом фильтрации "зашумленных" данных ДУС. Модель включает: дискретную модель объекта наблюдения - ДУС и модель процесса измерений, которая учитывает такие параметры ДУС как нестабильность цены импульса, неортогональность осей чувствительности, нестабильность смещения нулей, случайный уход (дрейф) датчика. В качестве алгоритма фильтрации данных ДУС о составляющих вектора угловой скорости КА использован оптимальный рекуррентный фильтр Калмана, позволяющий минимизировать среднеквадратическую ошибку оценивания вектора состояния объекта и выделять полезный сигнал на фоне случайных помех. Такой фильтр для дискретных моделей объекта наблюдения и процесса измерения позволяет выполнять оптимальное оценивание в реальном масштабе времени полета КА. В качестве исходных данных приняты параметры ДУС типа ADIS-16350, который выполнен по MEMS-технологии. Приведены результаты численного моделирования динамических процессов фильтрации данных ДУС и оценивания угловых скоростей КА, получены значения погрешностей оценивания.

**Ключевые слова:** КОСМИЧЕСКИЙ АППАРАТ, УГЛОВАЯ ОРИЕНТАЦИЯ, ФИЛЬТРАЦИЯ, ОЦЕНИВАНИЕ, ФИЛЬТР КАЛМАНА, ПОГРЕШНОСТЬ ОЦЕНОК.

## **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПОХИБОК ОЦІНЮВАННЯ КУТОВИХ ШВИДКОСТЕЙ КОСМІЧНОГО АПАРАТА**

І.А. Сидоров, О.О. Манойленко

*Дніпровський національний університет імені Олеса Гончара, пр. Гагаріна 72, м. Днепр,  
49010, Україна, e-mail: [aamz5@meta.ua](mailto:aamz5@meta.ua)*

**Анотація.** В даний час відзначається підвищений інтерес до створення бесплатформенних інерційних навігаційних систем (БІНС), які складають інформаційне ядро сучасних бортових комплексів орієнтації та навігації космічних апаратів (КА). БІНС можуть включати магнітометри, астродатчики, датчики кутових швидкостей (ДКШ). Точність орієнтації КА багато в чому залежить від складу БІНС. Найвність ДКШ в складі БІНС забезпечує кращу точність. У зв'язку з цим завдання, які пов'язані з фільтрацією "зашумлених" даних з ДКШ, оцінюванням і розрахунком похибок оцінок, калібруванням датчиків БІНС, є актуальними. У даній роботі запропонована математична модель для вирішення задачі розрахунку похибок оцінювання кутових швидкостей КА з урахуванням фільтрації "зашумлених" даних ДКШ. Модель включає: дискретну модель об'єкта спостереження - ДКШ і модель процесу вимірювань, яка враховує такі параметри ДКШ як нестабільність ціни імпульсу, неортогональність осей чутливості, нестабільність зміщення нулів, випадковий ухід (дрейф) датчика. В якості алгоритму фільтрації даних ДКШ про складові вектора кутової швидкості КА використаний оптимальний рекуррентний фільтр Калмана, що дозволяє мінімізувати середню квадратичну помилку оцінювання вектора стану об'єкта і виділяти корисний сигнал на фоні випадкових перешкод. Такий фільтр для дискретних моделей об'єкта спостереження і процесу вимірювання дозволяє виконувати оптимальне оцінювання в реальному масштабі часу польоту КА. В якості вихідних даних прийняті параметри ДКШ типу ADIS-16350, який

виконаний за MEMS-технологією. Наведено результати чисельного моделювання динамічних процесів фільтрації даних ДКШ і оцінювання кутових швидкостей КА, отримані значення похибок оцінювання. Ключові слова: КОСМІЧНИЙ АПАРАТ, КУТОВА ОРІЄНТАЦІЯ, ФІЛЬТРАЦІЯ, ОЦІНЮВАННЯ, ФІЛЬТР КАЛМАНА, ПОХИБКА ОЦІНОК.

## MATHEMATICAL MODEL FOR CALCULATION OF ERRORS FOR ESTIMATING ANGULAR VELOCITY OF THE SPACECRAFT

I. Sidorov, A. Manoilenko

*Oles Honchar Dnipro National University, Gagarin 72, Dnipro, 49010, Ukraine, e-mail: [aamz5@meta.ua](mailto:aamz5@meta.ua)*

**Abstract.** At present, there is an increased interest in the creation of platform-free inertial navigation systems (SINS), which constitute the information core of modern on-board orientation and navigation systems for spacecraft (SC). SINS can include magnetometers, astro sensors, angular rate sensors (ARS). The accuracy of determining the spacecraft orientation largely depends on the SINS composition. The presence of ARS in the SINS provides the best accuracy. In this regard, the tasks associated with filtering "noisy" data from the control system, estimating and calculating the estimation errors, and calibrating the SINS sensors are relevant. In this paper, a mathematical model is proposed for solving the problem of calculating the errors in estimating the angular velocities of the spacecraft taking into account the filtering of the "noisy" data of the ARS. The model includes: a discrete model of the object of observation - the ARS and the model of the measurement process, which takes into account such parameters of the ARS as the instability of the pulse price, the non-orthogonality of the sensitivity axes, the instability of the zero shift, and the random drift of the sensor. The optimal recurrent Kalman filter is used as a filtering algorithm for the ARS data on the components of the spacecraft angular velocity vector, which makes it possible to minimize the root-mean-square error in estimating the object's state vector and to isolate the useful signal against the background of random noise. Such a filter for discrete models of the object of observation and the measurement process allows for optimal estimation in real time of the spacecraft flight. The parameters of the ADIS-16350 type ARS, which is made using MEMS - technology, were taken as the initial data. The results of numerical modeling of the dynamic processes of filtering the ARS data and the estimation of the angular velocities of the spacecraft are presented;

**Keywords:** SPACECRAFT, ANGULAR ORIENTATION, FILTERING, KALMAN FILTER, ERROR OF ESTIMATES.

### Введение

Решению проблем разработки высокоточных бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) космических аппаратов (КА), определения угловой ориентации КА на орбите, фильтрации и оценивания данных различных датчиков, калибровки датчиков, математических моделей погрешностей БИНС посвящено множество работ, в частности [1 – 5; 7 – 9].

В качестве объекта управления рассматривается малый КА, оснащенный управляющими электромагнитами, магнитометром и датчиком угловых скоростей КА.

При создании БИНС одной из основных задач является обеспечение их высокоточной калибровки, которая связана с определением систематических погрешностей инерциальных измерителей системы с требуемой точностью. В связи с этим исследования, направленные на повышение точности определения систематических погрешностей

инерциальных измерителей БИНС, включающих датчики угловых скоростей (ДУС), являются актуальными.

Для обеспечения таких исследований требуются:

- математическая модель погрешностей инерциальных измерителей БИНС;

- быстродействующие и достаточно точные алгоритмы фильтрации сигналов и оценивания параметров движения динамической системы в целом.

В общем виде задача оценивания вектора  $X$  состояния системы состоит в построении оценки  $\tilde{X}$  для вектора  $X$  по измерениям  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ , где  $k$  – номер дискретного шага. Вектор измерений  $Z$  является аддитивной функцией полезного сигнала и помехи. Для решения этой задачи в данной работе использован оптимальный рекуррентный алгоритм оценивания, называемый фильтром Калмана, позволяющий минимизировать среднеквадратическую ошибку оценивания вектора состояния объекта и выделять полезный сигнал на фоне случайных помех.

Алгоритм оптимального фильтра Калмана для дискретных наблюдений и дискретной модели анализируемого сигнала позволяет выполнять оптимальное оценивание в реальном масштабе времени полета КА.

### Постановка задачи исследований

Требуется сформировать математическую модель для решения задачи оценивания угловых скоростей КА с учетом фильтрации “зашумленных” данных ДУС и определить погрешность оценивания.

### Математическая модель объекта наблюдения

В качестве объекта наблюдения рассмотрим ДУС в составе БИНС, который измеряет угловые скорости КА.

Обозначим через  $X = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$  – вектор состояния объекта, где  $\omega_i$  – проекции вектора угловой скорости КА на оси приборной системы координат (ПСК) БИНС,  $i = x, y, z$ .

Предположим, что в установившемся режиме движения угловая скорость КА по тангажу постоянна,  $\omega_z = const$ , а угловые скорости по крену и рысканию близки к нулю,  $\omega_x \approx \omega_y \approx 0$ .

Конечно-разностное уравнение дискретной линейной системы в пространстве состояний в векторно-матричной форме, удобной для применения фильтра Калмана, запишем в виде:

$$X_k = F X_{k-1} + q, \quad (1)$$

где  $k = 1, 2, \dots$  – номер дискретного такта;  $q = (q_x, q_y, q_z)$  – случайный вектор входного возмущения (вектор шумов процесса, входной шум) с корреляционной матрицей:

$$Q = \begin{vmatrix} q_x & 0 & 0 \\ 0 & q_y & 0 \\ 0 & 0 & q_z \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Примем, что случайные величины  $q_i$ ,  $i = x, y, z$  распределены по нормальному закону в диапазоне значений  $\pm 3\sqrt{q_e}$ ,  $q_e = 3,6 \cdot 10^{-14} \text{ град}^2 / \text{с}^2$ .

Фундаментальная матрица  $F$  – единичная.

### Математическая модель процесса измерений

Вектор суммарной погрешности показаний ДУС, обусловленной инструментальными погрешностями и погрешностями установки ДУС, в ПСК БИНС имеет вид:

$$E = \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{vmatrix} = H_0 \cdot \begin{vmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta\omega_x + \delta\omega_x / \sqrt{t} \\ \Delta\omega_y + \delta\omega_y / \sqrt{t} \\ \Delta\omega_z + \delta\omega_z / \sqrt{t} \end{vmatrix} = H_0 X + \Delta\Omega; \quad (3)$$

$$\text{где } H_0 = \begin{vmatrix} \delta\mu_x & \delta\alpha_{xy} & -\delta\alpha_{xz} \\ -\delta\alpha_{yx} & \delta\mu_y & \delta\alpha_{yz} \\ \delta\alpha_{zx} & -\delta\alpha_{zy} & \delta\mu_z \end{vmatrix};$$

$\delta\mu_i$  – нестабильность цены импульса ДУС;

$\delta\alpha_{ij}$  – неортогональность осей чувствительности ДУС в ПСК;

$\Delta\omega_i$  – нестабильность смещения нулей ДУС;

$\delta\omega_i$  – случайный уход (дрейф) ДУС;

$i, j = x, y, z$ .

Уравнение наблюдения в векторно-матричном виде, удобном для применения фильтра Калмана, запишем в виде:

$$Z = X + E + r = X + (H_0 X + \Delta\Omega) + r = (I + H_0)X + \Delta\Omega + r = HX + \Delta\Omega + r, \quad (4)$$

где  $Z$  – вектор измерения угловых скоростей КА, поступающих с ДУС;

$H$  – переходная матрица измерения:

$$H = \begin{vmatrix} 1 + \delta\mu_x & \delta\alpha_{xy} & -\delta\alpha_{xz} \\ -\delta\alpha_{yx} & 1 + \delta\mu_y & \delta\alpha_{yz} \\ \delta\alpha_{zx} & -\delta\alpha_{zy} & 1 + \delta\mu_z \end{vmatrix}; \quad (5)$$

$I$  – единичная матрица;

$r$  – вектор случайных шумов измерений (измерительный шум) с корреляционной матрицей:

$$R = \begin{vmatrix} r_x & 0 & 0 \\ 0 & r_y & 0 \\ 0 & 0 & r_z \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Примем, что случайные величины  $r_i$ ,  $i = x, y, z$ , распределены по нормальному закону в диапазоне значений  $\pm 3\sqrt{r_e}$ ,  $r_e = 0,04 \text{ град}^2 / \text{с}^2$ .

### Фильтрация и оценивание данных ДУС

Моделирование процессов оценивания вектора угловой скорости КА на оси приборной системы координат БИНС проводилось с использованием оптимального рекуррентного фильтра Калмана [6].

Оптимальный рекуррентный фильтр Калмана позволяет минимизировать среднеквадратическую ошибку оценивания вектора состояния объекта наблюдения (ДУС) и выделять полезный сигнал на фоне случайных помех. Такой фильтр для дискретных моделей объекта наблюдения и процесса измерения обеспечивает возможность выполнять оптимальное оценивание в реальном масштабе времени полета КА на орбите.

Однако неточное задание матриц  $Q$ ,  $R$ ,  $P$  может привести к существенному возрастанию (на порядок и более) ошибок оценивания вектора состояния объекта наблюдения по сравнению с оптимальным фильтром Калмана, т. е. будет наблюдаться расходимость фильтра. В этом случае следует применять адаптивный алгоритм, позволяющий определить момент «расстройки» фильтра Калмана и осуществить его коррекцию.

При помощи фильтра Калмана осуществляется не только восстановление вектора состояния объекта наблюдения, но и подавляется влияние измерительного шума.

В качестве начальной ковариационной матрицы ошибок оценивания  $P$  принималась матрица:

$$P(0) = \begin{vmatrix} p_o & 0 & 0 \\ 0 & p_o & 0 \\ 0 & 0 & p_o \end{vmatrix}, \quad (7)$$

где  $p_o = 0,225 \cdot 10^{-3} \text{ град}^2 / \text{с}^2$  – дисперсии величин  $\Delta \omega_i$ .

### Исходные данные

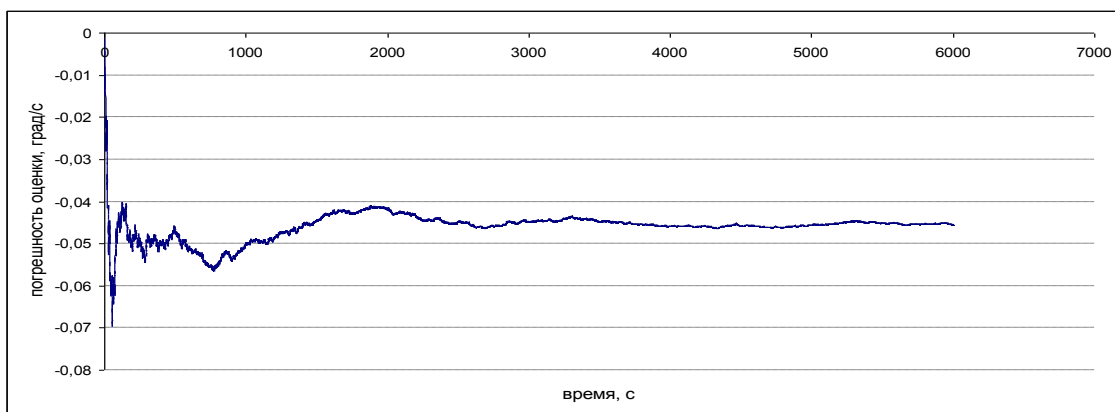
При численном моделировании на ПЭВМ принимались следующие данные, характеризующие номинальную траекторию полета КА и датчик угловых скоростей типа ADIS-16350 (выполнен по MEMS-технологии):

- продолжительность одного витка орбиты КА, 6000 с;
- среднее значение орбитальной угловой скорости КА по тангажу, 0,06 град/с;
- нестабильность цены импульса ДУС,  $\delta \mu_i = 0,01 \text{ б/р}$ ;
- нестабильность смещения нулей ДУС ( $1\sigma$ ),  $\Delta \omega_i = 0,015 \text{ град / с}$ ;
- случайный уход (дрейф) нулей ДУС,  $\delta \omega_i = 4,2 \text{ град / } \sqrt{\text{час}}$ ;
- неортогональность осей чувствительности ДУС к плоскостям установки в ПСК,  $\delta \alpha_{ij} = 0,25 \text{ град}$ ;
- частота полосы пропускания сигналов ДУС, 16 Гц.

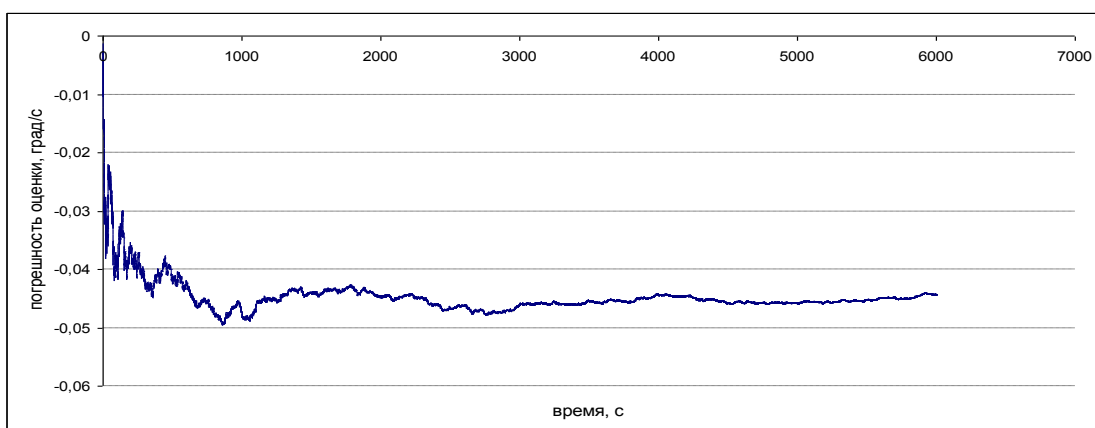
### Результаты моделирования

С использованием математических моделей (1) – (7) проведено численное моделирование на ПЭВМ процессов калмановской фильтрации и оценивания «зашумленных» данных ДУС. На рис. 1 – 3 представлены графики изменения по времени погрешностей оценивания  $\varepsilon = \tilde{X} - X$  компонент вектора  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$  угловой скорости КА в ПСК.

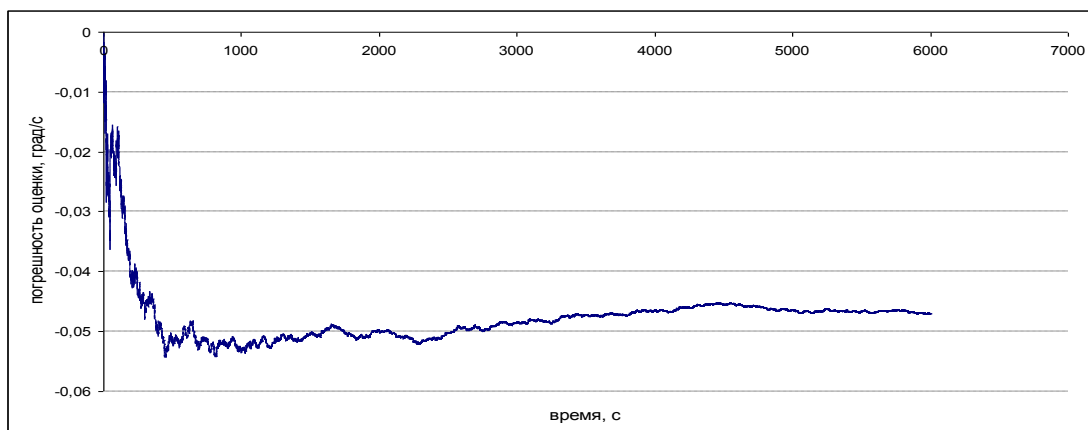
Из результатов, полученных при численном моделировании процессов фильтрации данных ДУС и оценивания угловых скоростей КА, следует, что погрешности оценивания компонент вектора угловой скорости КА составляют  $\sim 0,045 \text{ град / с}$  на момент прохождения КА одного витка орбиты ( $t = 6000 \text{ с}$ ). При этом используемый оптимальный рекуррентный фильтр Калмана обеспечивает приемлемую скорость сходимости процессов фильтрации и оценивания данных ДУС, соответствующую продолжительности  $\sim 4000 \dots 4500 \text{ с}$ .



**Рисунок 1 – Погрешность оценки угловой скорости  $\omega_x$ ,  $t = 6000$  с**



**Рисунок 2 – Погрешность оценки угловой скорости  $\omega_y$ ,  $t = 6000$  с**



**Рисунок 3 – Погрешность оценки угловой скорости  $\omega_z$ ,  $t = 6000$  с**

### **Научная новизна**

Научная новизна заключается в разработке математической модели процесса расчета погрешностей оценивания угловых скоростей КА с учетом фильтрации "зашумленных" данных ДУС. Модель описывает объект наблюдения – ДУС и процесс измерения, который учитывает такие параметры как нестабильность цены импульса,

неортогональность осей чувствительности, нестабильность смещения нулей и случайный дрейф датчика.

### **Выводы**

Предложена математическая модель для решения задачи расчета погрешностей оценивания угловых скоростей КА с учетом фильтрации "зашумленных" данных ДУС.

Для фильтрации данных ДУС используется рекуррентный фильтр Калмана, который приводит к минимуму среднеквадратическую ошибку оценивания вектора состояния и выделяет в реальном масштабе времени полезный сигнал на фоне случайных помех.

Результаты исследований имеют практическое значение, поскольку расширяют методическую базу для разработчиков программного обеспечения систем ориентации и стабилизации КА.

### Библиографические ссылки

1. Галкин Д. И. Алгоритм оценки параметров ориентации КА с использованием фильтра Калмана. *Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана: электронное издание*, 2013. 11 с.
2. Картунов В. И., Проскура Г. А. Уравнения ошибок бесплатформенных инерциальных навигационных систем и анализ наблюдаемости. *Системи обробки інформації. Обробка інформації в складних технічних системах*, 2006, № 9(58). С. 112–115.
3. Мелашенко О.М., Рижков Л.М. Дослідження гравітаційно-магнітної системи стабілізації мікросупутника з оцінюванням фазового вектора фільтром Калмана. *Наукові вісті НТУУ КПІ. Приладобудування та інформаційно-вимірвальна техніка*, 2008, №2. С. 61–67.
4. Николаев С.Г., Ившина Ю.В. Калибровка бесплатформенных инерциальных навигационных систем по выходным сигналам модели ошибок. *Научно-техн. ведомости СПб ГПУ. Информационные, управляющие и измерительные системы. Информатика. Телекоммуникации. Управление*, 2014, № 4 (200). С. 95–105.
5. Ратайчук И.А., Картунов В.И. Исследование моделей ошибок БИНС в задаче синтеза комплексных фильтров. *Комп'ютерні системи та інформаційні технології. Радіоелектронні та комп'ютерні системи*, 2012, №2(54). С. 95–99.
6. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Университетская книга, Логос, 2007. 640 с.
7. Roberta Veloso Garcia, Hélio Koiti Kuga, Maria Cecília Zanardi. Unscented Kalman Filter for Determination of Spacecraft Attitude Using Different Attitude Parameterizations and Real Data. *Journal of Aerospace Technology and Management*, 2016. Vol. 8, №1. Sao Jose dos Campos; <https://doi.org/10.5028/jatm.v8i1.509>.
8. Pablo Bernal-Polo and Humberto Martínez-Barberá. Kalman Filtering for Attitude Estimation with Quaternions and Concepts from Manifold Theory. *Sensors (Basel)*, 2019, 19(1); <https://doi.org/10.3390/s19010149>.
9. Ning X. L., Ding Z. H., Chen P. P. Spacecraft angular velocity estimation method using optical flow of stars. *Science China. Information Sciences*, 2018, 61(11):112203; <https://doi.org/10.1007/s11432-017-9338-8>.

Надійшла до редколегії 20.11.2020

### Сведения об авторах



Сидоров Илья Андреевич, Украина. Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара. Аспирант. Сфера интересов – системы и процессы управления.



Манойленко Александр Алексеевич. Украина. Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара. Кандидат технических наук, доцент. Сфера интересов – системы и процессы управления.