

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ МАНИПУЛЯТОРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MATHCAD

Н. С. Ащепкова

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, пр. Гагаріна 72,
м. Дніпро, 49010, Україна

Аннотация. Предложен метод анализа устойчивости программных движений манипулятора с использованием пакета прикладных программ Mathcad. Задача синтеза алгоритма управления манипулятором сводится к задаче определения коэффициентов матричной передаточной функции регулятора, удовлетворяющих условиям устойчивости и качества переходных процессов. Данный метод может использоваться для анализа управляемости манипулятора на этапе проектирования; позволяет определить влияние конструктивных, кинематических и динамических параметров на управляемость манипулятора и выполнить математическое моделирование движения манипулятора.

Ключевые слова: МАНИПУЛЯТОР, ПРОГРАММНЫЕ ДВИЖЕНИЯ, СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ.

Анотація. Запропоновано метод аналізу стійкості програмних рухів маніпулятора з використанням пакета прикладних програм Mathcad. На основі кінематичної схеми маніпулятора сформовані матриці однорідних перетворень Денавіта Хартенберга та складена математична модель розширеного об'єкта керування. Представлено структурну схему системи керування розширеним об'єктом керування, що складається з маніпулятора й виконавчого пристрою. Для прикладу, розглянуті лінійні рівняння маніпулятора, приводів, вимірника й регулятора. Завдання синтезу алгоритму керування маніпулятором зводиться до завдання визначення коефіцієнтів матричної передатної функції регулятора, що задовольняють умовам стійкості і якості перехідних процесів. Математичне моделювання програмних рухів маніпулятора виконано з використанням пакета прикладних програм Mathcad. Аналіз результатів моделювання дозволяє оцінити: робочий простір маніпулятора, швидкодія системи керування, точність позиціонування схвату, залежність помилки позиціонування схвату від характеру навантаження й закону руху. Зміна динамічних характеристик розширеного об'єкта управління обумовлює зміну керованості систем, для розглянутого прикладу rang $Q = 2$, тобто система повністю керована.

Даний метод може використовуватися для аналізу керованості маніпулятора на етапі проектування; дозволяє визначити вплив конструктивних, кінематичних і динамічних параметрів на керованість маніпулятора й виконати математичне моделювання руху маніпулятора. Наведено розрахункові приклади, які підтверджують доцільність і ефективність використання пакета прикладних програм Mathcad для вирішення даного типу завдань.

Ключові слова: МАНИПУЛЯТОР, ПРОГРАМНІ РУХИ, СИСТЕМА КЕРУВАННЯ.

Abstract. The method of the stability analysis of the manipulator program movements with use of Mathcad applied programs package is offered. On the basis of the manipulator's kinematic scheme, the matrices of homogeneous transformations of Denavit Hartenberg are formed and a mathematical model of the extended control object is drawn up. An outline of an extended object control system consisting of a manipulator and an actuator is presented. For example, the linear equations of the manipulator, actuators, meter and controller are considered. The task of synthesizing the manipulator control algorithm is to determine the coefficients of the matrix transfer function of the controller that satisfy the conditions of stability and quality of transients. Mathematical modeling of manipulator programmatic movements was performed using the Mathcad application package. The analysis of simulation results allows us to evaluate: manipulator workspace, control system performance, grip positioning accuracy, dependence of grip positioning error on the nature of load and the law of motion. A change in the dynamic characteristics of an extended control object causes a change in the controllability of systems, for the considered example rang $Q = 2$, i.e. the system is fully controllable.

This method can be used to analyze the manipulation of the manipulator at the design stage; allows to determine the influence of design, kinematic and dynamic parameters on the manipulation of the manipulator and perform mathematical modeling of the manipulator motion. Calculation examples are given that confirm the expediency and effectiveness of using the Mathcad application software package to solve this type of problem.

Key words: the MANIPULATOR, PROGRAM MOVEMENTS, CONTROL SYSTEM.

Введение

В настоящее время расширяется

область применения манипуляторов. Это приводит к повышению требований к качеству программных движений

манипулятора: устойчивости программных движений, точности позиционирования, уменьшению времени переходных процессов и т.д.

Постановка задачи

Для обеспечения качества программных движений манипулятора, уменьшения ошибок позиционирования и обеспечения качественного регулирования применяют системы управления с использованием обратных связей.

Рассмотрим задачу стабилизации программных движений манипулятора, представляющую собой задачу синтеза алгоритма управления для обеспечения асимптотической устойчивости программного движения $q_p(t)$ при $t \in [t_0, t_f]$ при выполнении ограничений на быстродействие, перерегулирование, колебательность, степень устойчивости и т.д.

Динамика манипулятора описывается уравнением Лагранжа, которое часто представляется в виде [4, 5, 7, 8]:

$$A^*(q, \xi)\ddot{q} + B^*(q, \dot{q}, \xi) = \delta, \quad (1)$$

а динамика приводов [7, 8]

$$T_1\ddot{\delta} + T_2\dot{\delta} + T_3\delta + T_4M_H(q, \dot{q}, \xi) = KU, \quad (2)$$

где $A^*(q, \xi)$ – матрица размерности $n \times n$, зависящая от конфигурации манипулятора;

$B^*(q, \dot{q}, \xi)$ – вектор-столбец размерности $n \times 1$;

q – вектор обобщенных координат манипулятора;

q' – вектор обобщенных скоростей манипулятора;

ξ – вектор геометрических и массово-инерционных параметров манипулятора;

δ – вектор-столбец размерности $n \times 1$ усилий и моментов в приводах манипулятора;

M_H – вектор-столбец размерности $n \times 1$ моментов внешних нагрузок на выходных валах приводов;

U – вектор-столбец размерности $n \times 1$ управляющих сигналов.

Анализ литературы

Система уравнений (1, 2) описывает расширенный объект управления, состоящий из манипулятора и

исполнительного устройства, и используется для синтеза системы управления структурная схема которой представлена на рис.1.

Для примера, рассмотрим линейные уравнения манипулятора, приводов, измерителя и регулятора. Тогда, уравнение расширенного объекта управления

$$A\bar{x} + B\bar{\delta} = \dot{\bar{x}},$$

где \bar{x} – вектор-столбец размерности $n \times 1$ переменных состояния расширенного объекта управления;

$\bar{\delta}$ – вектор-столбец управлений размерности $m \times 1$, $m \leq n$;

A – матрица собственных значений расширенного объекта управления размерности $n \times n$;

B – вектор-столбец размерности $n \times m$.

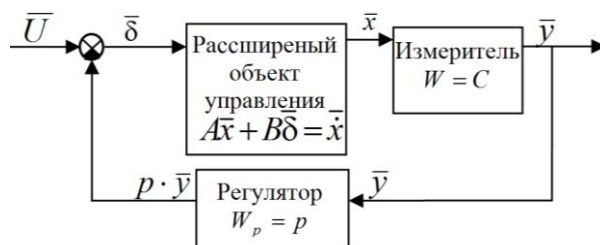


Рисунок 1 – Структурная схема системы управления с идеальным регулятором

Управляющее воздействие задано уравнением

$$\bar{\delta} = \bar{U} - p \cdot \bar{y},$$

где \bar{U} – командный входной сигнал управления;

\bar{y} – вектор-столбец выходных координат объекта управления размерности $r \times 1$, $r \leq n$;

p – матрица коэффициентов системы управления размерности $1 \times n$.

Уравнение измерительного устройства

$$\bar{y} = C \cdot \bar{x},$$

где C – матрица измерений размерности $r \times n$.

Предположим, что измерительное устройство работает идеально, т.е. без искажения измеряет все переменные состояния расширенного объекта управления, тогда $C = I$, а, следовательно, $\bar{y} = I \cdot \bar{x} = \bar{x}$. В этом случае структурная схема системы

управления будет иметь вид представленный на рис.2.

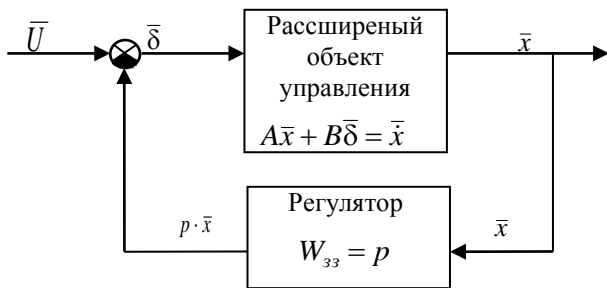


Рисунок 2 – Структурная схема системы управления с идеальным регулятором

Задача синтеза алгоритма управления манипулятором сводится к задаче определения коэффициентов матрицы P , удовлетворяющих условиям устойчивости и качества переходных процессов.

Под полной управляемостью динамической системы понимают наличие такого управляющего сигнала, который за ограниченный промежуток времени способен перевести все n переменных состояния расширенного объекта управления из заданных начальных состояний в требуемые конечные состояния. Причем, для полной управляемости необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости был равен порядку динамической системы [4,6 - 8]:

$$\text{rang } Q_y = n,$$

где $Q_y = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$ – матрица

управляемости размерности $n \times n \cdot m$;

A – матрица собственных значений расширенного объекта управления размерности $n \times n$;

B – вектор-столбец размерности $n \times m$.

Цель исследования

Разработка метода анализа устойчивости программных движений манипулятора в среде Mathcad.

Материалы и методы исследования

Математическая постановка задачи и начальные условия. Исходными данными являются [1, 2, 5, 7]:

- кинематическая схема

манипулятора,

- геометрические размеры и плотности звеньев манипулятора,
- требуемый закон движения схвата манипулятора,
- начальное положение звеньев,
- информация о нагрузке.

С каждым звеном манипулятора свяжем правую декартову систему координат $O_i X_i Y_i Z_i$. Начало отсчета O_i расположим в центре шарнира, одну координатную ось направим по оси шарнира, вторую координатную ось направим вдоль оси симметрии звена, третья координатная ось дополняет систему до правой [1, 2, 7, 8]. Движение манипулятора определяется изменением во времени обобщенных координат $q_i(t)$, которыми являются углы поворота - во вращательных, и перемещения - в поступательных кинематических парах.

Определим линейную скорость и ускорение особой точки в системе координат связанной с основанием робота. Учитывая, что \vec{r}_P^n определяет положение точки P n -го звена в системе координат связанной с n -ым звеном, получим:

$$\vec{v}_P^0 = \vec{r}_P^0 = \frac{d}{dt} (T_n \cdot \vec{r}_P^n) = \frac{d}{dt} T_n \cdot \vec{r}_P^n,$$

$$\vec{r}_P^{n0} = \vec{a}_P^0 = \frac{d^2}{dt^2} (T_n \cdot \vec{r}_P^n) = \frac{d^2}{dt^2} T_n \cdot \vec{r}_P^n.$$

Согласно [2]:

$$\frac{d}{dt} T_i = \sum_{k=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k; \quad \frac{\partial T_i}{\partial q_k} = \begin{cases} U_{ik}, & k \leq i, \\ 0, & k > i; \end{cases}$$

$$U_{ik} = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot \dots \cdot \frac{d A_{k-1}^k}{d q_k} \cdot \dots \cdot A_{n-1}^n = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot \dots \cdot \Omega_i \cdot A_{i-1}^i \cdot \dots \cdot A_{n-1}^n;$$

$$\frac{d^2}{dt^2} T_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i V_{ijk} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + \sum_{j=1}^i U_{ij} \cdot \ddot{q}_j;$$

$$V_{ijk} = \frac{d U_{ij}}{d q_k} = V_{ikj};$$

$$U_{i,jk} = \begin{cases} A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot \dots \cdot A_{i-2}^{i-1} \cdot \frac{d A_{i-1}^i}{d q_i} \cdot \dots \cdot A_{k-2}^{k-1} \cdot \frac{d A_{k-1}^k}{d q_k} \cdot \dots \cdot A_{n-1}^n, & j > k, \\ A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot \dots \cdot A_{k-2}^{k-1} \cdot \frac{d A_{k-1}^k}{d q_k} \cdot \dots \cdot A_{i-2}^{i-1} \cdot \frac{d A_{i-1}^i}{d q_i} \cdot \dots \cdot A_{n-1}^n, & j < k, \\ A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot \dots \cdot A_{j-2}^{j-1} \cdot \frac{d^2 A_{j-1}^j}{d q_j^2} \cdot \dots \cdot A_{n-1}^n, & j = k. \end{cases}$$

Кинетическую энергию манипулятора

определим по формуле [4-6]:

$$Ek = 0.5 \cdot \sum_{i=1}^n tr \left(\frac{d}{dt} T_i \cdot H_i \cdot \left(\frac{d}{dt} T_n \right)^T \right),$$

$$H_i = \begin{bmatrix} J_{xx}^{(i)} & J_{xy}^{(i)} & J_{xz}^{(i)} & m_i \cdot x_i \\ J_{yx}^{(i)} & J_{yy}^{(i)} & J_{yz}^{(i)} & m_i \cdot y_i \\ J_{zx}^{(i)} & J_{zy}^{(i)} & J_{zz}^{(i)} & m_i \cdot z_i \\ m_i \cdot x_i & m_i \cdot y_i & m_i \cdot z_i & m_i \end{bmatrix},$$

где H_i – матрица, характеризующая инерцию i -го звена;

m_i – масса i -го звена;

x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести i -го звена в системе координат связанной с i -ым звеном; $J_{xx}^{(i)}, J_{xy}^{(i)}, \dots, J_{zz}^{(i)}$ – элементы тензора инерции, вычисляемые для i -го звена в системе координат связанной с i -ым звеном.

Потенциальную энергию манипулятора вычислим по формуле [1-3, 7]:

$$Ep = - \sum_{i=1}^n m_i \cdot G^T \cdot T_i \cdot \vec{P}_i,$$

$$G^T = [0 \quad 0 \quad -g \quad 0]$$

где g – ускорение свободного падения.

Уравнение Лагранжа II-го рода имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial Ek}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial Ek}{\partial q_i} + \frac{\partial Ep}{\partial q_i} = F_i, \quad (3)$$

где F_i – обобщенные не потенциальные силы, т.е. проекции на оси кинематических пар моментов (если пары вращательные) и сил (если пары поступательные).

После преобразований (3), запишем уравнение Лагранжа II-го рода в матричном виде [1, 2, 5]:

$$\sum_{i=j}^n \sum_{k=1}^i tr(U_{ij} \cdot H_i \cdot U_{ik}^T) \cdot \ddot{q}_k +$$

$$+ \sum_{i=j}^n \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i tr(U_{ij} \cdot H_i \cdot U_{ik}^T) \times$$

$$\times \dot{q}_k \dot{q}_l - \sum_{i=j}^n m_i \cdot G^T \cdot U_{ij} \cdot \vec{P}_i = F_i. \quad (4)$$

Результаты исследований

Пакет прикладных программ Mathcad позволяет выполнить кинематический и

динамический анализ, оценить точность позиционирования и пределы досягаемости схвата путём решения линейных и нелинейных алгебраических, дифференциальных уравнений и систем уравнений; выполнением операций с векторами, матрицами и полиномами [9-10]. Метод кинематического и динамического анализа манипулятора с использованием Mathcad предложен автором в [2], анализ точности позиционирования манипулятора с использованием Mathcad предложен автором в [3].

Проиллюстрируем применение данного алгоритма с использованием Mathcad. Кинематическая схема манипулятора представлена на рис. 3.

Предположим, что известны законы изменения обобщенных координат

$$q_1(t) = 0.1t^2 + 0.01t,$$

$$q_2(t) = 0.025t + 0.1,$$

$$q_3(t) = 0.03t + 0.15;$$

начальные положения звеньев манипулятора $q_1(t_0) = 0, q_2(t_0) = 0.1, q_3(t_0) = 0.15$; в системе $X_2Y_2Z_2$ координаты полюса схвата в начальный момент времени $P(0; 0.3; 0)$.

Алгоритм кинематического и динамического анализа манипулятора с использованием Mathcad подробно изложен в статье [2]. Воспользуемся изложенными в [2] результатами для анализа управляемости манипулятора.

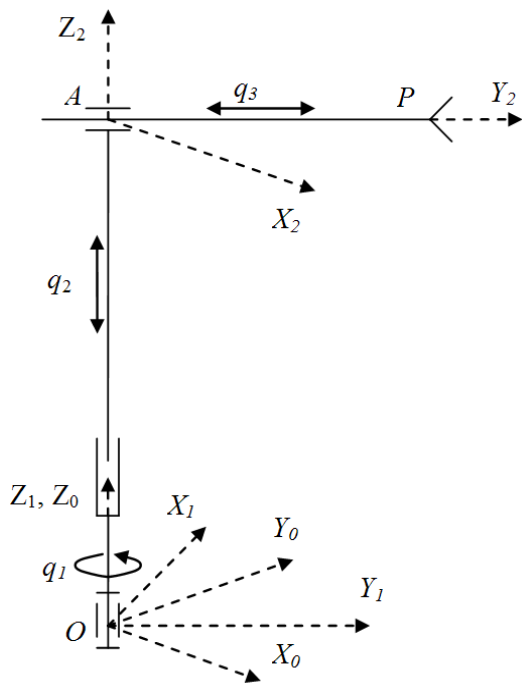


Рисунок 3 – Кинематическая схема манипулятора

В каждой кинематической паре введём правые системы координат $X_i; Y_i; Z_i$. Для рассматриваемого примера на основании [2] получим

$$A_0^1 = A_w(\vec{k}, q_1), \quad A_1^2 = A_v(\vec{k}, q_2), \quad A_2^3 = A_v(\vec{j}, q_3), \\ \dots, \quad A_{n-1}^n = A_v(\vec{i}, q_n).$$

Составим цепочку перемещений от 0 – го звена (основания манипулятора) до 3 – го звена, относительно которого особая точка неподвижна:

$$0 \xrightarrow{A_w(\vec{k}, q_1)} 1 \xrightarrow{A_v(\vec{k}, q_2)} 2 \xrightarrow{A_v(\vec{j}, q_3)} 3.$$

Составим матрицы преобразования координат Денавита-Хартенберга [1-3, 7]:

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_3(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ A_0^1 = \begin{bmatrix} \cos q_1(t) & -\sin q_1(t) & 0 & 0 \\ \sin q_1(t) & \cos q_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Составим матричное уравнение Лагранжа II рода, для этого воспользуемся служебными матрицами (приложение 1).

Составим матрицы A и B для уравнений Лагранжа II рода, блочную матрицу управляемости Q и рассчитаем ее

ранг.

Изменение динамических характеристик расширенного объекта управления обуславливает изменение управляемости системы. Для рассмотренного примера $\text{rang } Q=2$, т.е. система полностью управляема.

Выводы

Данный метод может использоваться для анализа управляемости манипулятора на этапе проектирования; позволяет определить влияние конструктивных, кинематических и динамических параметров на управляемость манипулятора и выполнить математическое моделирование движения манипулятора.

Анализ результатов моделирования позволяет оценить:

- рабочее пространство манипулятора,
- быстродействие системы управления,
- точность позиционирования схвата,
- зависимость ошибки позиционирования схвата от характера нагрузки и закона движения.

Результаты моделирования могут быть представлены в виде таблиц и графиков, которые можно импортировать в документы и презентации.

Приведены расчетные примеры подтверждающие целесообразность и эффективность использования пакета прикладных программ Mathcad для решения данного типа задач.

Библиографические ссылки

1. Ащепкова Н. С. Моделирование и кинематический анализ кривошипно-шатунного механизма. *Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика і моделювання*. Харків, 2014. № 62. С. 3 – 12.
2. Ащепкова Н. С. Метод кинематического и динамического анализа манипулятора с использованием Mathcad. *Восточно-Европейський журнал передових технологій*. Харьков, 2015. № 5/7

(77). С. 54 – 63.

3. Ащепкова Н. С. Моделирование та аналіз точності позиювання манипулятора. *Вісник НТУ “ХПИ”. Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси.* Харків, 2017. № 19 (1241). С. 34 – 42.

4. Зенкевич С. Л., Ющенко А. С. Основы управления манипуляционными роботами: учебник для вузов. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 480 с.

5. Колюбин С. А. Динамика робототехнических систем. Уч. пособие. Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2017. 117 с.

6. Шашихин В.Н. Современные проблемы автоматического управления. Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2017. 210 с.

7. Шахинпур М. Курс робототехники. Пер. с англ. Москва: Мир, 1990. 527 с.

8. Юревич Е. И. Основы робототехники. Санкт-Петербург: Питер, 2005. 252 с.

9. Maxfield В. Engineering with Mathcad: using Mathcad to create and organize your engineering calculation. Butterworth-Heinemann, 2016. 512 p.

10. Maxfield В. Essential Mathcad for Engineering, Science, and Math. Academic Press, 2009. 528 p.

Надійшла до редколегії 14.11.2019р.

Відомості про автора



Ащепкова Наталія Сергіївна, Україна. Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара. Кандидат техн. наук, доцент. Сфера інтересів – динаміка та керування рухом мобільних об'єктів змінної конфігурації.

Приложение 1

$$\begin{aligned} \Omega_{c_i2} &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_{c_j2} &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_{c_k2} &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Omega_{b_i2} &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_{b_j2} &:= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_{b_k2} &:= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H1 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.6 & 1 \end{pmatrix} & H2 &:= \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} & H3 &:= \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \\ U_{11}(t) &:= \Omega_{b_k} \cdot A10(t) & U_{12}(t) &:= 0 & U_{13}(t) &:= 0 & U_{111}(t) &:= (\Omega_{b_k2}) \cdot A10(t) \\ U_{21}(t) &:= \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot A21(t) & U_{22}(t) &:= A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) & & & & \\ U_{211}(t) &:= (\Omega_{b_k2}) \cdot A10(t) \cdot A21(t) & U_{212}(t) &:= \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) & U_{213}(t) &:= 0 & & \\ U_{221}(t) &:= \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) & U_{222}(t) &:= A10(t) \cdot (\Omega_{c_k2}) \cdot A21(t) & U_{223}(t) &:= 0 & & \\ U_{31}(t) &:= \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot A21(t) \cdot A32(t) & U_{32}(t) &:= A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) \cdot A32(t) & U_{33}(t) &:= A10(t) \cdot A21(t) \cdot \Omega_{c_j} \cdot A32(t) & & \\ U_{311}(t) &:= (\Omega_{b_k2}) \cdot A10(t) \cdot A21(t) \cdot A32(t) & U_{312}(t) &:= \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) \cdot A32(t) & U_{313}(t) &:= \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot A21(t) \cdot \Omega_{c_j} \cdot A32(t) & & \\ U_{321}(t) &:= \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) \cdot A32(t) & U_{322}(t) &:= A10(t) \cdot (\Omega_{c_k2}) \cdot A21(t) \cdot A32(t) & U_{32}(t) &:= A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) \cdot \Omega_{c_j} \cdot A32(t) & & \\ U_{331}(t) &:= \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot A21(t) \cdot \Omega_{c_j} \cdot A32(t) & U_{332}(t) &:= A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) \cdot \Omega_{c_j} \cdot A32(t) & U_{333}(t) &:= A10(t) \cdot A21(t) \cdot (\Omega_{c_j2}) \cdot A32(t) & & \end{aligned}$$